Бесплатно

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ АКАДЕМИИ НАУК
ЭСТОНСКОЙ ССР

На правах рукописи

КИЙРАНЕН Калле Эдуардович

УДК 517.944:519,46:539.12

ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ

01.04.02 Теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

ТАРТУ 1989

Работа выполнена в Институте физики Академии наук Эстонской ССР.

Научный руководитель:

кандидат физико-математических наук, старшии научный сотрудник А.А.АЙНСААР

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор А.А.БОРГАРДТ

кандидат физико-математических наук, доцент Р.-К.Р.ЛОЙДЕ

Ведущая организация:

Институт математики АН Украйнской ССР.

Защита диссертации состоится "9" 06 1989 г. в 13 часов на заседании специализированного совета Д 017.01.01 по защите докторских диссертаций при Институте физики АН ЭССР, адрес: 202400, г. Тарту, ул. Рийа, 142.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института физики АН ЭССР.

Автореферат разослан "3" 05 1989 г.

Ученый секретарь совета Х.Ф.Кяэмбре

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В начале 60-х годов Л.В.Овсяннико-вым и др. было начато систематическое изучение применения групп Ли к анализу множества решений дифференциальных уравнений (ДУ) механики и физики[1]. Эта теория была обобщена, с одной стороны, Н.Х.Ибрагимовым и Р.Л.Андерсоном[2] на касательные преобразования бесконечного порядка (преобразования Ли-Беклунда (ЛБ)), а с другой стороны, В.И.Фущичем[3] на нелокальные преобразования. Оба направления объединены в работе Б.Г.Конопельченко и В.Г.Моханчева[4]. Групповой анализ является особенно плодотворным в случае нелинейных ДУ, которые в последнее время очень широко распространены в физических теориях. Основными объектами исследований в данной работе являются уравнения калибровочных полей (КП). Согласно современной точке зрения, каждая модель взаимодействия элементарных частиц должна охватывать эти фундаментальные поля. Абелевые КП описываются давно известными уравнениями Максвелла. Имеются также их нелинейные обобщения - уравнения Борна-Инфельда. Неабелевые КП описываются обычно нелинейными уравнениями Янга-Миллса (ЯМ) или соответствующими

---

1 Овсянников Л.В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. - Новосибирск, Изд. Сиб.отд. АН СССР, 1962. - 236 с.

2 Ибрагимов Н.Х., Андерсон Р.Л. Группы касательных преобразований Ли-Беклунда// ДАН СССР, 1976, т.227, № 3, с.539-542.

3 Фущич В.И. О дополнительной инвариантности релятивистских уравнений движения// ТМФ, 1971, т.7, № 1, с.3-12.

4 Конопельченко Б.Г., Моханчев В.Г. К групповому анализу дифференциальных уравнений// ЯФ, 1979, т.30, в.2(8), с.559-567.

автодуальными (самодуальными) уравнениями. Пока единственным четырехмерным примером, обладающим свойствам вполне интегрируемых уравнений, является автодуальное уравнение ЯМ. Последнее вызвало огромный интерес после открытия инстантонов в 1975 году. Применяя разные анзацы, найдены и многие другие решения этих уравнений, но групповые свойства этих уравнений и их решений мало исследованы. Настоящая диссертация посвящена групповому анализу уравнений КП и связанных с ними уравнений (уравнения Клейна-Гордона, Янга, Польмайера, Виттена, Борна-Инфельда и др.).

Основной целью данной работы является вычисление генераторов групп преобразований Ли или ЛБ, допускаемых уравнениями КП и связанных с ними уравнений и нахождение новых инвариантно-групповых решений с помощью этих преобразований.

Научная новизна. Вычислены генераторы групп точечных преобразований Ли, допускаемые уравнениями КП и связанных с ними уравнений.

Доказано, что каждая калибровочная теория допускает т.н. обобщенные калибровочные преобразования, которые, с другой стороны, являются преобразованиями ЛБ.

Интерпретируются некоторые решения уравнений ЯМ с групповой точки зрения, а для уравнений Янга получены некоторые новые инвариантно-групповые решения и законы сохранения.

Действие релятивистской струны обобщается на действие n-мерного объекта в m-мерном пространстве ($m > n$). Доказывается, что последний можно параметризировать так, что первоначальный лагранжиан факторизуется соответствующим якобианом, а полученное действие описывает $(m-n)$-компонентное поле в n-мерном пространстве. Соответствующие уравнения являются годограф-инвариантными, но не калибровочно-инвариантными.

На защиту выносится:

I. Генераторы максимальной группы точечных преобразований Ли, допускаемые уравнениями КП и связанных с ними уравнений.

2. Обобщенные калибровочные преобразования как преобразования ЛБ.

3. Групповая интерпретация некоторых решений уравнений ЯМ и новые инвариантно-групповые решения для уравнений Янга.

4. Преобразование обобщенного действия релятивистской струны (симплеона) в действие, описывающее поле с годограф-инвариантными уравнениями типа Борна-Инфельда.

5. Групповая классификация уравнений типа Клейна-Гордона в случаях $n = 1, 2$ и $n \geqslant 3$.

6. Метод нахождения контактных преобразований Ли для некоторого линейного обыкновенного ДУ.

Практическая ценность. Результаты, полученные в диссертации, могут быть использованы при нахождении новых инвариантно-групповых решений и законов сохранения для рассмотренных уравнений.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на семинарах теоретической физики Института физики АН ЭССР, на всесоюзном расширенном коллоквиуме в Уфе (1983) и на всесоюзном семинаре в Тарту (1983).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 9 научных работах /I-9/.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 5 разделов, заключения, приложения и списка литературы из 185 наименований. Общий объем диссертации составляет 129 стр., в том числе 109 стр. основного текста.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

ВВЕДЕНИЕ

Дано обоснование актуальности темы диссертации, сформулирована основная цель работы, раскрыты научная новизна и практическая ценность работы, перечислены тезисы, выносимые на защиту. Приведены данные об апробации работы и кратко изложена структура диссертации.

Раздел I. ОБЩАЯ МЕТОДИКА ГРУППОВОГО АНАЛИЗА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Этот раздел носит обзорный характер.

В п. I.I изложен основной математический аппарат для вычисления группы точечных преобразовании Ли, допускаемой системой ДУ порядка ℓ :

$$\omega^a(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \ldots, \underset{\ell}{u}) = 0, \qquad (I)$$

где $\underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \ldots$ соответственно производные первого, второго порядка (обычно $\ell \leq 2$). Определяющее уравнение для вычисления генераторов

$$X = \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u_\alpha} \qquad (2)$$

($i = 1, \ldots, n$; $\alpha = 1, \ldots, m$) группы Ли имеет вид

$$\underset{\ell}{X}\, \omega^a(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{\ell}{u})\Big|_{\omega^a = 0} = 0, \qquad (3)$$

где $\underset{\ell}{X}$ - ℓ-раз продолженный генератор X .

В п. I.2 даны аналогичные формулы для вычисления касательных преобразований. Из них нетривиальными являются контактные преобразования Ли и преобразования ЛБ. Имеется и их обобщение на нелокальные преобразования.

Далее представлен алгоритм для нахождения инвариантно-групповых решений (п. I.3) и законов сохранения (п. I.4) с помощью группы преобразования Ли, допускаемой системой ДУ.

В п. I.5 рассмотрены некоторые соотношения между уравнениями и группами (обратная задача, задача групповой классификации).

Раздел 2. ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для освоения методов группового анализа ДУ сначала рассмотрены уравнения типа $u_{xx} = a(u)$, где $a(u)$ - произвольная функция.

В п. 2.I проделана групповая классификация этого уравнения, в п. 2.2 изучена проблема нахождения преобразований, которые связывают два данных уравнения. Также предложен метод нахождения контактных преобразований Ли (п.2.3) и изучена обратная задача (п. 2.4).

Раздел 3. УРАВНЕНИЯ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ

В п. 3.I представлены уравнения КП: в абелевом случае - уравнения Максвелла и в неабелевом случае - уравнения ЯМ и автодуальные уравнения ЯМ. Последние записаны в виде

$$P^{\pm}_{\mu\nu\alpha\beta} F^a_{\alpha\beta} = 0, \qquad (4)$$

где $$F^a_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f_{abc} A^b_\mu A^c_\nu,$$

$$P^{\pm}_{\mu\nu\alpha\beta} \equiv \pm \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} + \delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha} - \delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} \qquad (5)$$

- обобщенные символы т'Офта ($P^{-}_{\mu\nu 4a} = \eta^a_{\mu\nu}$; $P^{+}_{\mu\nu 4a} = \bar{\eta}^a_{\mu\nu}$). Изучены алгебраические свойства этих символов, дан обзор свойств автодуальных уравнений в J -представлений:

$$(J^{-1} J_{,y})_{,\bar{y}} + (J^{-1} J_{,z})_{,\bar{z}} = 0. \qquad (6)$$

В п. 3.2 вычислены максимальные группы точечных преобразований Ли, допускаемые уравнениями Максвелла, уравнениями ЯМ и автодуальными уравнениями ЯМ. Для двух последних уравнений группа имеет генераторы (в каноническом виде):

$$X = f^a_\mu \frac{\partial}{\partial A^a_\mu} + \ldots, \qquad f^a_\mu = \xi_\nu F^a_{\nu\mu} + \mathcal{D}^{ab}_\mu(\xi_\nu A^b_\nu), \qquad (7)$$

$\xi_\mu = K_\mu + a_{\mu\nu} x_\nu + d \cdot x_\mu + 2C_\nu x_\nu x_\mu - C_\mu x_\nu x_\nu$ - вектор Киллинга и

$$Y_\theta = \mathcal{D}^{ab}_\mu \theta^b \frac{\partial}{\partial A^a_\mu} + \ldots, \qquad \mathcal{D}^{ab}_\mu \equiv \delta^{ab}\partial_\mu + g f^{abc} A^c_\mu, \qquad (8)$$

$\theta^a = \theta^a(x)$ - произвольная функция.

В случае лоренцевой калибровки группа симметрий оказывается более узкой ($c_\mu = 0$; $\theta^a_{,\mu} = 0$).

П. 3.3. Определяющее уравнение генераторов преобразований ЛБ для автодуальных уравнений ЯМ (4) допускает генераторы:

$$Y_\theta = f^a_\mu(\theta)\frac{\partial}{\partial A^a_\mu} + \dots, \text{ где } f^a_\mu(\theta) = -\frac{1}{g} d_\mu \theta^a + f^{abc}\theta^b A^c_\mu, \quad (9)$$

$$d_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \overset{a}{A}{}^\alpha_{,\mu}\frac{\partial}{\partial A^a_\alpha} + \dots, \quad \theta^a = \theta^a(x, A, \underset{1}{A}, \underset{2}{A}, \dots)$$

и тем самым обобщенные калибровочные преобразования

$$A^a_\mu \to A^a_\mu - \frac{1}{g} d_\mu \theta^a + f_{abc}\theta^b A^c_\mu . \quad (10)$$

Коммутационные соотношения в этой алгебре имеют вид

$$[Y_\varphi, Y_\psi] = Y_\theta, \quad (11)$$

где $\theta^a = Y_\varphi \psi^a - Y_\psi \varphi^a + f_{abc}\psi^b\varphi^c$. Такие преобразования допускают все калибровочные теории. Рассмотрены также уравнения Максвелла и система с взаимодействием.

Далее, в п. 3.4 интерпретированы некоторые решения уравнений ЯМ с групповой точки зрения. Получены все $P^{\pm}_{\mu\nu\alpha\beta} M_{\alpha\beta}$ – инвариантные решения, где $M_{\alpha\beta}$ – генераторы подгруппы вращений в 4-пространстве.

П. 3.5. В абелевом случае изучена обратная задача (в классе уравнений I-ого и 2-ого порядка).

Раздел 4. НЕКОТОРЫЕ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЕ УРАВНЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С УРАВНЕНИЯМИ ЯНГА-МИЛЛСА

В п. 4.I проделана групповая классификация уравнения Клейна-Гордона

$$\Box u = a(u), \quad (12)$$

где $\Box \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ ($n \geqslant 3$) и $a(u)$ – произвольная функция.

П. 4.2. Конкретным выбором J можно из (6) получить уравнения Янга:

$$\begin{aligned} &\phi(\phi_{,y\bar{y}} + \phi_{,z\bar{z}}) - \phi_{,y}\phi_{,\bar{y}} - \phi_{,z}\phi_{,\bar{z}} + \rho_{,y}\bar{\rho}_{,\bar{y}} + \rho_{,z}\bar{\rho}_{,\bar{z}} = 0 \\ &\phi(\rho_{,y\bar{y}} + \rho_{,z\bar{z}}) - 2\rho_{,y}\phi_{,\bar{y}} - 2\rho_{,z}\phi_{,\bar{z}} = 0 \\ &\phi(\bar{\rho}_{,y\bar{y}} + \bar{\rho}_{,z\bar{z}}) - 2\bar{\rho}_{,\bar{y}}\phi_{,y} - 2\bar{\rho}_{,\bar{z}}\phi_{,z} = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\phi^* = \phi \qquad \bar{\rho} = \pm \rho^*$ (14)

для $J \in SU(2)$ и $J \in SU(1,1)$, соответственно. Они допускают бесконечнопараметрическую квазигруппу с алгеброй $L = X \oplus Y$, где X состоит из генераторов

$$\begin{aligned} &\tilde{X}_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad \tilde{X}_5 = x_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad \tilde{X}_6 = x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_1}, \\ &\tilde{X}_7 = x_3\frac{\partial}{\partial x_4} - x_4\frac{\partial}{\partial x_3}, \quad \tilde{X}_8 = x_1\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_1} + x_4\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_4}, \\ &\tilde{X}_9 = x_1\frac{\partial}{\partial x_4} - x_4\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_2}, \end{aligned} \quad (15)$$

а Y (учитывая условие (I4) в случае $SU(2)$) – из генераторов:

$$\begin{aligned} &\tilde{X}_{10} = (c + c^*)\phi\frac{\partial}{\partial\phi} + 2c\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + 2c^*\rho^*\frac{\partial}{\partial\rho^*} \\ &\tilde{X}_{11} = h\frac{\partial}{\partial\rho} + h^*\frac{\partial}{\partial\rho^*} \\ &\tilde{X}_{12} = (f\rho + f^*\rho^*)\phi\frac{\partial}{\partial\phi} + (f\rho^2 - f^*\phi^2)\frac{\partial}{\partial\rho} + (f^*\rho^{*2} - f\phi^2)\frac{\partial}{\partial\rho^*}, \end{aligned} \quad (16)$$

где c, h, f – произвольные функции переменных $\bar{y} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - i x_2)$, $\bar{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_3 + i x_4)$. Преобразование $\tilde{X}_{11}$ не изменяет первоначальных потенциалов, $\tilde{X}_{10}$ – дает локальные и $\tilde{X}_{12}$ – нелокальные преобразования A^a_μ.

В п. 4.3 вычислена группа точечных преобразований Ли для уравнений Польмайера

$$\begin{aligned} &q^\alpha_{,y\bar{y}} + q^\alpha_{,z\bar{z}} + q^\alpha(q^\beta_{,\bar{y}} q_{\beta,y} + q^\beta_{,\bar{z}} q_{\beta,z}) + \\ &+ i\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} q_\beta(q_{\gamma,\bar{y}} q_{\delta,y} + q_{\gamma,\bar{z}} q_{\delta,z}) = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

где $q_\alpha q^\alpha = 1$, полученных из уравнений (6) группу с алгеброй $L_{15} = X \oplus Y$, где X дана генераторами (I5), а Y - генераторами

$$Z_{0i} = q_0 \frac{\partial}{\partial q_i} - q_i \frac{\partial}{\partial q_0}, \quad Z_{ij} = q_i \frac{\partial}{\partial q_j} - q_j \frac{\partial}{\partial q_i}. \qquad (I8)$$

В п. 4.4 получены инвариантно-групповые решения для уравнений Янга (I3), в том числе H-инвариантные решения, где $H = \tilde{X}_6, \tilde{X}_7$, $(\tilde{X}_6, \tilde{X}_7, \tilde{X}_8)$ или $(\tilde{X}_6, \tilde{X}_7, \tilde{X}_9)$, $(\tilde{X}_5, \tilde{X}_6, \tilde{X}_7)$, а также инвариантно-групповые решения для генераторов $\tilde{X}_{10}, \tilde{X}_{11}, \tilde{X}_{12}$. Последние дают решения "чистой калибровки" ($F^a_{\mu\nu} = 0$), только для $\tilde{X}_{12}$ получен с помощью преобразований Беклунда из $SU(1,1)$-решения нетривиальное $SU(2)$-решение

$$A^a_y = \frac{1}{g}\left(-iu_{,\bar{z}} e^{-iv}, \quad -u_{,\bar{z}} e^{-iv}, \quad iu_{,y} \operatorname{cth} \frac{u}{2}\right)$$
$$A^a_z = \frac{1}{g}\left(iu_{,\bar{y}} e^{-iv}, \quad u_{,\bar{y}} e^{-iv}, \quad iu_{,z} \operatorname{cth} \frac{u}{2}\right) \qquad (I9)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

где $\phi = c(1 - \operatorname{ch} u)$, $\rho = c \operatorname{sh} u\, e^{iv}$, $\bar{\rho} = c \operatorname{sh} u\, e^{-iv}$.

В п. 4.5 изучены законы сохранения для системы Янга по методу п. I.4.

Раздел 5. ДВУМЕРНЫЕ МОДЕЛИ, СВЯЗАННЫЕ С УРАВНЕНИЯМИ ЯНГА-МИЛЛСА

В п. 5.I проделана групповая классификация для уравнения Клейна-Гордона (I2) в случае $n = 2$. Среди нелинейных уравнений выделяется уравнение с экспоненциальной зависимостью от u. Уравнения такого типа имеют также нетривиальную алгебру ЛБ.

В п. 5.2 изучены уравнения Э.Виттена для 4 функций u^μ:

$$u^1_{,0} + u^1_{,1} + u^1 u^4 - u^2 u^3 = 0$$
$$u^2_{,0} - u^1_{,1} + u^1 u^3 + u^2 u^4 = 0 \qquad (20)$$
$$u^4_{,0} - u^3_{,1} + u^1 u^1 + u^2 u^2 = 0$$

($x_0 \equiv t$, $x_1 \equiv r$, $r^2 \equiv x_k x_k$) с групповой точки зрения.

Они допускают бесконечнопараметрическую алгебру точечных преобразований Ли с генераторами

$$X = f \frac{\partial}{\partial x_0} + g \frac{\partial}{\partial x_1} - u_1 f_{,0} \frac{\partial}{\partial u_1} - u_2 g_{,1} \frac{\partial}{\partial u_2} + (u_4 f_{,1} - u_3 f_{,0} - f_{,01}) \frac{\partial}{\partial u_3} + (u_3 g_{,0} - u_4 g_{,1} + g_{,01}) \frac{\partial}{\partial u_4}, \qquad (21)$$
$$Y = h\left(u_2 \frac{\partial}{\partial u_1} - u_1 \frac{\partial}{\partial u_2}\right) + h_{,0} \frac{\partial}{\partial u_3} + h_{,1} \frac{\partial}{\partial u_4},$$

где $f_{,1} + g_{,0} = 0$, $f_{,0} - g_{,1} = 0$, $h(x_0, x_1)$ - произвольная функция, а также преобразования ЛБ с генераторами

$$Y = f_\mu \frac{\partial}{\partial u_\mu} + \ldots, \qquad f_1 = u^2 \varphi, \quad f_2 = -u^1 \varphi, \qquad (22)$$
$$f_3 = D_0 \varphi, \quad f_4 = D_1 \varphi, \quad \varphi = \varphi(x, u, \underset{1}{u}, \ldots)$$

Исключением в некотором смысле является п. 5.3, где рассмотрены минимальные поверхности (струны) и их обобщения на n-мерный случай (симплеоны). Соответствующее действие

$$S = -\alpha \iint \ldots \int d\xi^0 d\xi^1 \ldots d\xi^n \sqrt{-\det g}, \qquad (23)$$

где $g_{ik}(\xi) = -x^\lambda_{,i} x_{\lambda,k}$ ($x^\lambda_{,i} \equiv \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^i}$; $i, k = 0, 1, \ldots, n$; $\lambda = 0, 1, \ldots, m$). Оказывается, что

$$\sqrt{-\det g} = D \sqrt{\det \phi}, \qquad (24)$$

где $\phi^\mu_\nu \equiv \delta^\mu_\nu + \varphi^\alpha_{,\nu} \varphi_\alpha{}^{,\mu}$, $x_\alpha = \varphi_\alpha(x^0, x^1, \ldots, x^n)$, а D - якобиан между координатами x_λ и ξ_i ($\alpha = n+1, \ldots, m$). В результате действие (23) принимает вид

$$S = -\alpha \iint \ldots \int dx^0 dx^1 \ldots dx^n \sqrt{\det \phi}. \qquad (25)$$

Уравнения поля, полученные из такого действия, являются годограф-инвариантными, но не калибровочно-инвариантными. В частном случае ($n = 1$, $m = 2$ и $n = 1$, $m = 3$) получены т.н. уравнения Борна-Инфельда, для которых вычислены максимальные группы преобразований Ли (L_7 и L_{11}). С помощью симплектического скалярного произведения получены калибровочно-инвариантные уравнения Борна-Инфельда ($n=3$), однако в этом случае теряется годограф-инвариантность.

В п. 5.4 вычислены максимальные группы точечных преобразований Ли для двумерных уравнений, связанные с автодуальными уравнениями ЯМ (уравнения Эрнста, нелинейной сигма-модели), а также для уравнений двумерной модели ЯМ.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

I. Вычислены генераторы групп точечных преобразований Ли, допускаемые уравнениями КП. Доказано, что в лоренцевой калибровке конформная группа G_{15} и группа калибровочных преобразований G^{0}, которые являются максимальной симметрией (в смысле Ли) уравнений ЯМ и автодуальных уравнений ЯМ, ограничивается соответственно до группы Вейля G_{11} и группы вращений G_3 в изотопическом пространстве (в случае $SU(2)$).

2. Доказано, что каждая калибровочная теория допускает т.н. обобщенные калибровочные преобразования, которые, с другой стороны, являются преобразованиями ЛБ. Приведены соответствующие коммутаторы генераторов для абелевого и неабелевого случая.

3. Изучены алгебраические свойства т.н. обобщенных символов т'Офта $P^{\pm}_{\mu\nu\alpha\beta}$, которые появляются в каждой калибровочной теории с автодуальными уравнениями.

4. Интерпретируются некоторые решения уравнений ЯМ с групповой точки зрения. Получены $P^{\pm}_{\mu\nu\alpha\beta}M_{\alpha\beta}$ -инвариантные решения.

5. Доказано, что в классе ДУ первого и второго порядка "автодуальные" уравнения и уравнения Максвелла для абелевых полей находятся в однозначном соответствии со своими группами.

6. Вычислены точечные преобразования Ли для уравнений Янга и Польмайера, а также преобразования между ними. В случае уравнений Янга получен бесконечнопараметрическая квазигруппа, в которой некоторые преобразования в терминах первоначальных потенциалов оказываются нелокальными. Уравнения Польмайера допускают I5-параметрическую группу.

7. С помощью группы преобразований Ли и преобразований Беклунда найдены некоторые новые инвариантно-групповые решения для уравнений Янга.

8. С помощью группы преобразований Ли найдены все 4-вектора для системы Янга, которые удовлетворяют нетеровскому закону сохранения.

9. Вычислены точечные преобразования Ли, допускаемые двумерными уравнениями Э.Виттена, типа Борна-Инфельда, Эрнста, нелинейной сигма-модели и двумерной модели ЯМ. Для уравнений Виттена представлены также генераторы обобщенных калибровочных преобразований как преобразований ЛБ.

IO. Действие релятивистской струны обобщается на действие n -мерного объекта (симплеон) в m -мерном пространстве и доказывается, что его можно параметризировать так, что первоначальный лагранжиан факторизуется соответствующим якобианом, а полученное действие описывает ($m-n$)-компонентное поле в n -мерном пространстве. Соответствующие уравнения являются годограф-инвариантными, но не калибровочно-инвариантными.

II. Проделана групповая классификация уравнений типа Клейна-Гордона в случаях $n=1,2$ и $n\geqslant 3$. В первом случае появляются 6, во втором - 5 и в третьем случае - 6 разных групп. Уравнения с кубической нелинейностью, связанные с уравнениями ЯМ, имеют максимальную (конформную) симметрию среди других нелинейных уравнений (в случае $n=4$).

I2. В качестве простого примера найдены для уравнения $u_{xx}=u$ контактные преобразования Ли и формулы преобразования между этим уравнением и уравнением $v_{tt}=0$. Эти уравнения являются в однозначном соответствии со своей группой.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ ОПУБЛИКОВАНЫ В СЛЕДУЮЩИХ РАБОТАХ

1. Ainsaar A., Kiiranen K., Kõiv M. Symmetries arising in generalized string action// ENSV TA Toim.Füüs.Matem., 1978, k.27, Nr.4, 453-455.
2. Kõiv M., Ainsaar A., Kiiranen K. Field-space-time symmetry and scalar Born-Infeld equation. - Tartu, 1981. - 39 p. (Preprint/ Acad.Sci. Estonian SSR, F-15)
3. Rosenhaus V., Kiiranen K. On symmetry groups of Yang-Mills and self-dual Yang-Mills equations// ENSV TA Toim. Füüs.Matem., 1982, k.31, Nr.3, 304-312.
4. Ainsaar A., Kiiranen K. Group analysis of some ordinary differential equations// Proc.Acad.Sci. ESSR, Phys.Math., 1986, v.35, Nr.1, p.1-8.
5. Hallap T., Kiiranen K. Lie point transformations admitted by E.Witten equations// Proc.Acad.Sci. ESSR, Phys. Math., 1987, v.36, Nr.4, p.431-433.
6. Kiiranen K., Rosenhaus V. Gauge invariance as the Lie-Bäcklund transformation group// J.Phys.A: Math.Gen., 1988, v.21, L681-L684.
7. Kiiranen K., Rosenhaus V. On invariance groups in gauge theories// Proc.Acad.Sci ESSR, Phys.Math., 1989, v.38, Nr.2.
8. Kiiranen K., Rosenhaus V. From group to equation. The Maxwell equation// Proc.Acad.Sci. ESSR, Phys.Math., 1989, v.38, Nr.3.
9. Kiiranen K., Rosenhaus V. Nonlocal transformations and some invariant solutions of the Yang equations// Публикуется в: Труды ИФ АН ЭССР, Фундаментальные поля, 1989.

K Kiiranen

К и й р а н е н Калле Эдуардович. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. На русском языке. Институт физики АН ЭССР. 202400, г.Тарту, ул.Рийа, 142. Подписано к печати 28.03.1989. МВ 01431. Формат 60x90/16. Бумага писчая. Машинопись. Ротапринт. Учетно-издательских листов 0,72 уч.-изд. л., 0,75 п. л. Тираж 150. Заказ № 262. Бесплатно. Типография ТГУ, ЭССР, 202400, г.Тарту, ул. Тийги, 78.